# DM n°2 : Corrigé

**Exercice 1 : une preuve de $\sum_{k=1}^{n} k^3$ sans connaitre la formule à l'avance**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^4 - k^4\right]$.

- D'une part, par télescopage,

$$S_n = (n+1)^4 - 1^4 = (n+1)^4 - 1$$

- D'autre part, un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left[4k^3 + 6k^2 + 4k + 1\right] \\ &= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que

$$(n+1)^4 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} 4\sum_{k=1}^{n} k^3 &= (n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n \\ &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 1 - n(2n^2 + 3n + 1) - 2n^2 - 2n - n \\ &= n^4 + 2n^3 + n^2 \\ &= n^2\left(n^2 + 2n + 1\right) \\ &= n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \boxed{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

**Exercice 2 : calcul de sommes**

(On reconnait dans la somme $S$ une expression très proche d'un coefficient binomial. Pour l'obtenir, il suffit de multiplier en haut et en bas par $n!$ et de sortir de la somme celui qui est en bas)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \left(= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} 1^k 1^{n-k}\right) \\ &= \frac{1}{n!}(1+1)^n \\ &= \boxed{\frac{2^n}{n!}} \end{aligned}$$

(Pour $T$, on aimerait aussi faire apparaitre un coefficient binomial. Malheureusement, il y a cette fois un $(k+1)!$ au dénominateur, mais un changement d'indice permet d'y remédier)

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j!(n+1-j)!} \qquad \text{avec } j=k+1 \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j}
\end{aligned}$$

(on ne peut pas appliquer la formule du binôme car la somme commence à l'indice 1. Mais en ajoutant / retranchant un terme, on arrive au bon résultat)

$$T = \frac{1}{(n+1)!} \left( \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} - \binom{n+1}{0} \right) = \boxed{\frac{1}{(n+1)!} \left(2^{n+1}-1\right)}$$

**Exercice 3 : un calcul avec une crosse de hockey**

(on sait ce que vaut $\displaystyle\prod_{j=1}^{p} j$, mais ici on a $\displaystyle\prod_{j=1}^{p}(i+j)$... Mais à nouveau, un changement d'indice permet de régler le problème)

$$Q = \sum_{i=0}^{n} \prod_{j=1}^{p} (i+j) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{k=i+1}^{i+p} k \qquad \text{avec } k = i+j$$

(ici on a fait un changement d'indice dans le produit uniquement ! En cas de doute, on peut vérifier facilement que cela est licite : $\displaystyle\prod_{j=1}^{p}(i+j) = (i+1)(i+2)\cdots(i+p) = \prod_{k=i+1}^{i+p} k$ .)

$$\begin{aligned}
Q &= \sum_{i=0}^{n} \prod_{k=i+1}^{i+p} k \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{(i+p)!}{i!} \\
&= p! \sum_{i=0}^{n} \frac{(i+p)!}{i!p!} \\
&= p! \sum_{i=0}^{n} \binom{i+p}{p} \qquad \text{car } \frac{(i+p)!}{i!p!} = \frac{(i+p)!}{(i+p-p)!p!} = \binom{i+p}{p} \\
&= \boxed{p! \binom{n+p+1}{p+1}}
\end{aligned}$$

par la formule de la crosse de hockey de Pascal.